Fiche de synthèse

www.e-repetiteur.sn

Compositions d'applications

Mathématiques

Monsieur THAIRÉ
Professeur de Mathématiques

Terminale L

AVERTISSEMENT

► RAPPEL SUR LES FONCTIONS

1. Définition d'une fonction

Soient A et B deux ensembles non vides, on appelle fonction f de A vers B, toute correspondance f qui à tout élément de A on associe au plus un élément de B.
On note :$f : A \to B$

$x \mapsto f(x)$

2. Ensemble de définition

Soit f une fonction définie par : $f : A \to B$

$x \mapsto f(x)$

On appelle ensemble de définition de f ou domaine de définition de f, l'ensemble des éléments x de A pour lesquels $f(x)$ existe.
On note généralement D_f.

Remarque :

- Les fonctions polynômes sont définies sur $\mathbb{R}$.
- Une fonction rationnelle existe si son dénominateur est différent de 0.
- Une fonction racine carrée existe si son radical est supérieur ou égale à 0.

Exemple : calculons le domaine des fonctions suivantes :

1)$f(x) = x^2 - 2x + 7$ 2) $g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{-2x+3}}$

Solution

1) Quand on a une fonction polynôme son domaine est toujours égale à $\mathbb{R}$

Donc $D_f = \mathbb{R}$

2) $g\ existe\ sssi \begin{cases} \frac{x-1}{-2x+3} \geq 0 \\ et - 2x + 3 \neq 0 \end{cases}$ posons $\frac{x-1}{-2x+3} = 0 \Rightarrow x = 1\ et\ a\ x = \frac{3}{2}$

Or d'après la deuxième condition $x \neq \frac{3}{2}$

Traçons le tableau de signe pour $\frac{x-1}{-2x+3}$

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
x-1	-	+		+
-2x+3	+	+		-
$\frac{x-1}{-2x+3}$	-	+		-

Donc $D_g = \left[1; \frac{3}{2}\right[$

Exercice d'application : Calculer le domaine des fonctions suivantes :

$f(x) = 2x^3 - 3x + 1$ $g(x) = \frac{3x-4}{x+1}$ $h(x) = \frac{\sqrt{2x+3}}{x-3}$ $k(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

► APPLICATIONS

1. Définition

Soient A et B deux ensembles.
Une application de A vers B est une correspondance qui a tout élément de A on associe un unique élément dans B.

Remarque :
Si le domaine de définition d'une fonction est égal à son ensemble de départ alors la fonction est une application.

Exemple : Dire si chacune des fonctions suivantes est une application.

1)$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ $avec\ I =]-2;2[$ 2)$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-3}}$ $avec\ I =]-\infty;0[$

Solution

1) $f \exists \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4-x^2} \neq 0 \\ et\ 4-x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4-x^2 \neq 0 \\ et\ (2-x)(2+x) \geq 0 \end{cases}$

$x \neq 2\ et\ x \neq -2$
Traçons le tableau de signe de $4 - x^2 \geq 0$

x	$-\infty$	-2		2		$+\infty$
$4-x^2$	-	|	+	|	-	

$D_f =]-2;2[= I$ donc f est une application

2) $g \exists \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-3} \geq 0\ et\ x-3 \neq 0$

Posons $\frac{x-1}{x-3} = 0$, on obtient $x = 1\ et\ x \neq 3$

Traçons le tableau de signe de $\frac{x-1}{x-3}$

x	$-\infty$	1		3		$+\infty$
$x-1$	-	|	+	|	+	
$x-3$	-	|	-	|	+	
$\frac{x-1}{x-3}$	+	|	-	||	+	

Donc $D_g =]-\infty;1]U]3;+\infty[\neq]-\infty;0]$
D'où g n'est pas une application

2. Composition d'application

Soient $f\ et\ g$ deux fonctions tels que : $f: A \to B$ $et\ g: B \to C$
$x \mapsto f(x)$ $x \longmapsto g(x)$

On appelle fonction composée de g par la fonction f la fonction notée gof définie par $gof(x) = g(f(x))$.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

$gof \ \ existe \ sssi \begin{cases} x \ \epsilon \ D_f \\ f(x) \ \epsilon \ D_g \end{cases}$

Exemple :

Soit $f \ et \ g$ deux fonctions telles que : $f(x) = \frac{x+1}{x+2} \ \ et \ \ g(x) = \sqrt{x+1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de chaque fonction.
2. Déterminer les domaines des fonctions composées $fog \ et \ \ gof$.
3. Donner les formules explicites de $fog(x) \ et \ \ gof(x)$.

Solution :

1. $\boldsymbol{f \ existe \ sssi \ x+2 \neq 0 \ \Rightarrow x \neq -2}$ **donc** $\boldsymbol{D_f} = \mathbb{R} - \{-2\}$

$g \ existe \ sssi \ x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$ donc $D_g = [-1;+\infty[$

2. **Domaines de** $\boldsymbol{fog \ et \ \ gof.}$

$$fog \ existe \ sssi \begin{cases} x \ \epsilon D_g \\ g(x) \ \epsilon \ D_f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \sqrt{x+1} \neq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ \epsilon[-1;+\infty[\\ \sqrt{x+1} \neq -2 \ tjrs \ vrai \end{cases}$$

$D_{fog} = [-1;+\infty[$

$$gof \ existe \ sssi \begin{cases} x \ \epsilon D_f \\ f(x) \ \epsilon \ D_g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ \frac{x+1}{x+2} \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ \epsilon \ \mathbb{R} - \{-2\} \\ \frac{x+1}{x+2} + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ \epsilon \ \mathbb{R} - \{-2\} \\ \frac{2x+3}{x+2} \geq 0 \end{cases}$$

Posons $2x+3 = 0 \ et \ x+2 \neq 0 \ \Rightarrow x = \frac{-3}{2} \ et \ x \neq -2$

x	-∞	-2	$\frac{-3}{2}$ +∞
$2x+3$	-	-	+
$x+2$	-	+	+
$\frac{2x+3}{x+2}$	+	-	+

$D_{gof} =]-\infty;-2[\cup \left[\frac{-3}{2};+\infty\right[$

3. **Formules explicites**

$$fog(x) = f\big(g(x)\big) = \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$gof(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x+2}+1} = \sqrt{\frac{2x+3}{x+2}}$$

Exercice d'application :

On donne $f(x) = x^2 + 3x + 1 \ et \ g(x) = \frac{x^2}{x-3}$

1. Déterminer les domaines D_f et D_g.

2. Déterminer les domaines D_{fog} et D_{gof}.
3. Donner les formules explicites des fonctions composées $fog(x)$ et $gof(x)$.