

Fiche de synthèse

www.e-repetiteur.sn

Compositions d'applications

Mathématiques

Terminale L



Monsieur THAIRE

Professeur de Mathématiques

AVERTISSEMENT

La présente fiche de synthèse est la propriété de l'Académie de l'Enseignement Numérique en Afrique (ACENA), gestionnaire de la plateforme web et mobile www.e-repetiteur.sn.

La présente fiche est destinée uniquement aux membres et abonnés de la plateforme pour une utilisation purement académique et à travers les moyens de diffusion mis à la disposition de l'utilisateur.

Ainsi, il est formellement interdit de télécharger, partager, diffuser, reproduire tout ou partie de cette Fiche sans autorisation.

L'Académie de l'Enseignement Numérique en Afrique se réserve le droit de vérifier le respect des conditions générales d'utilisation de son service.

L'Académie de l'Enseignement Numérique en Afrique se réserve également le droit de porter devant les juridictions compétentes toute violation des conditions générales d'utilisation et des conditions générales de vente.

► RAPPEL SUR LES FONCTIONS

1. Définition d'une fonction

Soient A et B deux ensembles non vides, on appelle fonction f de A vers B, toute correspondance f qui à tout élément de A on associe au plus un élément de B.

On note : $f: A \rightarrow B$

$$x \mapsto f(x)$$

2. Ensemble de définition

Soit f une fonction définie par : $f: A \rightarrow B$

$$x \mapsto f(x)$$

On appelle ensemble de définition de f ou domaine de définition de f , l'ensemble des éléments x de A pour lesquels $f(x)$ existe.

On note généralement D_f .

Remarque :

- Les fonctions polynômes sont définies sur \mathbb{R} .
- Une fonction rationnelle existe si son dénominateur est différent de 0.
- Une fonction racine carrée existe si son radical est supérieur ou égale à 0.

Exemple : calculons le domaine des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = x^2 - 2x + 7 \quad 2) g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{-2x+3}}$$

Solution

1) Quand on a une fonction polynôme son domaine est toujours égale à \mathbb{R}

Donc $D_f = \mathbb{R}$

$$2) g \text{ existe sssi } \begin{cases} \frac{x-1}{-2x+3} \geq 0 \\ \text{et } -2x+3 \neq 0 \end{cases} \quad \text{posons } \frac{x-1}{-2x+3} = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ et } x = \frac{3}{2}$$

Or d'après la deuxième condition $x \neq \frac{3}{2}$

Traçons le tableau de signe pour $\frac{x-1}{-2x+3}$

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
x-1	-	+		+
-2x+3	+	+		-
$\frac{x-1}{-2x+3}$	-	+		-

$$\text{Donc } D_g = \left[1; \frac{3}{2}\right[$$

Exercice d'application : Calculer le domaine des fonctions suivantes :

$$f(x) = 2x^3 - 3x + 1 \quad g(x) = \frac{3x-4}{x+1} \quad h(x) = \frac{\sqrt{2x+3}}{x-3} \quad k(x) = \sqrt{x^2-4}$$

► APPLICATIONS

1. Définition

Soient A et B deux ensembles.

Une application de A vers B est une correspondance qui à tout élément de A on associe un unique élément dans B.

Remarque :

Si le domaine de définition d'une fonction est égal à son ensemble de départ alors la fonction est une application.

Exemple : Dire si chacune des fonctions suivantes est une application.

$$1) f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \text{ avec } I =]-2; 2[\quad 2) f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-3}} \text{ avec } I =]-\infty; 0[$$

Solution

$$1) f \exists \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4-x^2} \neq 0 \\ \text{et } 4-x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4-x^2 \neq 0 \\ \text{et } (2-x)(2+x) \geq 0 \end{cases}$$

$$x \neq 2 \text{ et } x \neq -2$$

Traçons le tableau de signe de $4-x^2 \geq 0$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$4-x^2$	-	+	-	-

$D_f =]-2; 2[= I$ donc f est une application

$$2) g \exists \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-3} \geq 0 \text{ et } x-3 \neq 0$$

Posons $\frac{x-1}{x-3} = 0$, on obtient $x = 1$ et $x \neq 3$

Traçons le tableau de signe de $\frac{x-1}{x-3}$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x-1$	-	+	+	+
$x-3$	-	-	+	+
$\frac{x-1}{x-3}$	+	-	+	+

Donc $D_g =]-\infty; 1] \cup]3; +\infty[\neq]-\infty; 0]$

D'où g n'est pas une application

2. Composition d'application

Soient f et g deux fonctions tels que : $f: A \rightarrow B$ et $g: B \rightarrow C$
 $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto g(x)$

On appelle fonction composée de g par la fonction f la fonction notée $g \circ f$ définie par $g \circ f(x) = g(f(x))$.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

$$g \circ f \text{ existe sssi } \begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases}$$

Exemple :

Soit f et g deux fonctions telles que : $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ et $g(x) = \sqrt{x+1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de chaque fonction.
2. Déterminer les domaines des fonctions composées $f \circ g$ et $g \circ f$.
3. Donner les formules explicites de $f \circ g(x)$ et $g \circ f(x)$.

Solution :

1. f existe sssi $x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$ donc $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

g existe sssi $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$ donc $D_g = [-1; +\infty[$

2. Domaines de $f \circ g$ et $g \circ f$.

$$f \circ g \text{ existe sssi } \begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \sqrt{x+1} \neq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-1; +\infty[\\ \sqrt{x+1} \neq -2 \text{ tjrs vrai} \end{cases}$$

$$D_{f \circ g} = [-1; +\infty[$$

$$g \circ f \text{ existe sssi } \begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ \frac{x+1}{x+2} \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} - \{-2\} \\ \frac{x+1}{x+2} + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} - \{-2\} \\ \frac{2x+3}{x+2} \geq 0 \end{cases}$$

Posons $2x + 3 = 0$ et $x + 2 \neq 0 \Rightarrow x = \frac{-3}{2}$ et $x \neq -2$

x	$-\infty$	-2	$\frac{-3}{2}$	$+\infty$
$2x + 3$	-	-	-	+
$x + 2$	-	+	+	+
$\frac{2x + 3}{x + 2}$	+	-	+	+

$$D_{g \circ f} =]-\infty; -2[\cup \left[\frac{-3}{2}; +\infty \right[$$

3. Formules explicites

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 2}$$

$$g \circ f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x+2} + 1} = \sqrt{\frac{2x+3}{x+2}}$$

Exercice d'application :

On donne $f(x) = x^2 + 3x + 1$ et $g(x) = \frac{x^2}{x-3}$

1. Déterminer les domaines D_f et D_g .

2. Déterminer les domaines D_{fog} et D_{gof} .
3. Donner les formules explicites des fonctions composées $fog(x)$ et $gof(x)$.